1126. L. Pontrjagin ノ双對定理ノ証明ニツイテ

吉田　耕作（名大）

先キノ談話デ"函数環"ノ考ヘヲ使ッテ compact 群ニ関スル浜中氏双對定理ヲ幾分簡単ニ証明シタ。局所 compact ナ可換群 G ノ双對定理（L. Pontrjagin）モ"のるむ環"ノ考ヘト Plancherel 定理ヲ使ッテ D. Raikov ガ証明シテ中ル。Raikov ハ Haar 測度ニ関スル Weil―小平ノ定理ヲ知ラナイラシク[1] ソノタメ一幾ラカソノ証明ガ冗長？ナヤウニ思ハレルノデ以下

(1) モットモ結局 Raikov ハ，可換群ノ場合ノ Weil―小平ノ定理ノ証明ヲシテ中ルコトニナル訳デセウガ。

ニ少シク簡單化サレタ証明ヲ述ベテミタイ。

Gノ連續指標ノ群ヲG^*, G^*ノ位相ハG^*ノ單位ノ近傍トシテ, Gノ任意ノcompact集合Cト$\varepsilon>0$トニ対シテ得ラレル$\{g^* \mid |g^*(g)-1|<\varepsilon,\ g\in C\}$ヲトルコトニヨリ定義スル(Pontrjagin). G^*ノ連續指標ノ群G^{**}ニ同ジヤウニシテ位相ヲ入レル。代數的ニ$G\subseteq G^{**}$ハ明カデアルガ双對定理ノ証明ノ核心ハ位相的ニ$G\subseteq G^{**}$即チGノ位相ガG^{**}ノ位相カラinduceサレタ部分集合トシテノ位相ト一致スルコトデアル。

扨テ$x(g)\in L^2(G)$トスレバWeil−小平ノ定理デGノ單位ノ近傍ハ

$$(1)\quad \left\{h \,\middle|\, \varepsilon>\int_G |x(g+h)-x(g)|^2 dg\right\}$$

ノ如キモノカラ生成サレル。所ガPlancherelノ定理ニヨリ變換

$L^2(G)\ni Z\to Z^*\in L^2(G^*)$, $L^2(G^*)\ni Z^*\to Z^{**}\in L^2(G^{**})$

ハイヅレモうにたりーデアル:

$$Z^*(g^*)=\int_G Z(g)g^*(g)\,dg,\quad g^*\in G^*$$

$$Z^{**}(g^{**})=\int_{G^*} Z^*(g^*)g^{**}(g^*)\,dg^*,\quad g^{**}\in G^{**}$$

故ニ

$$\int_G |x(g+h)-x(g)|^2 dg$$

$$=\int_{G^*} | g^*(-h)x^*(g^*)-x^*(g^*)|^2 dg^*$$

$$=\int_{G^{**}} |x^{**}(g^{**}-h)-x^{**}(g^{**})|^2 dg^{**}$$

ヨッテ G ノ単位ノ近傍(1)ハ，Weil－小平定理ニヨル，G^{**} ノ単位ノ近傍

$$\left\{h^{**} \,\middle|\, \varepsilon > \int_{G^{**}} |x^{**}(g^{**}-h^{**})-x^{**}(g^{**})|^2 dg^{**}\right\}$$

ノ G ヘノ射影トシテ得ラレル。逆ニ G^{**} ノ単位ノ近傍ノ G ヘノ射影ガ G ノ単位ノ近傍ナルコト即チ embedding $G \xrightarrow[in]{} G^{**}$ ノ連續性ハ位相ノ定義カラ容易ニ云ヘルコトデアルカラ証明了デアル。

(注意) 實ハコノ數換ノ部分モ Plancherel 定理ヲ使ヘバ初メノ部分ト同ジヤウニ証明デキルノデアル。即チ任意ノ $w^{**} \in L^2(G^{**})$ ニ対シ変換

$$L^2(G^{**}) \ni w^{**} \longrightarrow w^* \in L^2(G^*)$$

$$L^2(G^*) \ni w^* \longrightarrow w \in L^2(G)$$

ガ双方共ニうにたりーナコトヲ使ヘバヨイ

$$w^*(g^*)=\int_{G^{**}} w^{**}(g^{**})\, g^{**}(g^*)\, dg^{**}$$

$$w(g) = \int_{G^*} w^*(g^*)\, g^*(g)\, dg^*$$